第 55 卷 第 3 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 55 No. 3
2016 年 5 月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　May 2016

DOI：10.13471/j.cnki.acta.snus.2016.03.009

非负相依随机变量和的尾部概率一致渐近估计*

唐风琴[1,2]

（1. 兰州大学数学与统计学院，甘肃 兰州 730000；
2. 淮北师范大学数学科学学院，安徽 淮北 235000）

摘　要： 假设 $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ 为一列非负不同分布的随机变量，其分布函数属于重尾子族 – C 族且联合分布满足多元 FGM copula 函数。探讨了序列 $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ 的部分和及随机和的一致渐近估计，推广了相依结构随机变量尾部渐近概率的相应结果. 。

关键词： 精细大偏差；FGM；C 族

中图分类号： O211.65；O211.66　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529 – 6579（2016）03 – 0055 – 04

The uniformly asymptotic estimate for the tail probability of the sums of nonnegative and dependent random variables

TANG Fengqin[1,2]

（1. School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China;
2. School of Mathematics Sciences, Huaibei Normal University, Huaibei 235000, China）

Abstract: Suppose that $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ is a sequence of nonnegative and non-identically distributed random variables which belong to the subclass of heavy-tailed distributions-class C. The multivariate distribution function of the random variables is governed by the FGM copula function. The uniformly asymptotic estimate for the partial sums and random sums of the sequence $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ are studied, respectively. The obtained results extend the corresponding asymptotic estimate of the tail probability of the dependent random variables.

Key words: precise large deviations; FGM; consistently varying

假设 $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ 为不同分布的的非负随机变量序列，分布函数为 $F_i(x) = P(X_i \leqslant x)$，尾部概率为 $\overline{F}_i(x) = P(X_i > x)$ 且 $0 < \mu_i = EX_i < \infty, i \geqslant 1$。令 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$。有关 S_n 尾概率的研究十分丰富，可参考陈传勇[1]等。本文感兴趣的是当 $x \geqslant \gamma n, n \to \infty$ 时，$P(S_n - nc > x)$ 的一致渐近分布，其中 $\gamma > \gamma_0$，$c = c(\gamma_0), \gamma_0$ 为满足条件的常数。如果 $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ 同分布且为重尾的且 $c = EX$，这就是精细大偏差要研究的问题，它在理论和实际中有着重要的应用。关于精细大偏差的经典结果可参见 Nagaev（1969a，1969b），Heyde（1967a，1967b）及文献［2 – 5］。上述文献的结果都是在随机变量序列独立的假设下得到的，独立性的假设仅仅为了数学上的处理方便，实际变量之间更多的存在相依结构。Tang[6] 得到具有负相依结构的大偏差结果，Liu[7] 进一步的将相依结构推广。设 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是一随机过程且与序列 $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ 独立，并且假设 $N(0) = 0$，当 $t < \infty$ 时，$\lambda(t) = EN(t) < \infty$，且 $t \to \infty$ 时，$\lambda(t) \to \infty$。关于相依随机变量随机和的精细大偏差结果可参考文献［8 – 12］。特别地，He 等[13] 在随机变量服从较弱相依结构的假设下得到了部分和及随机和大偏差的下界。本文在一种新的相依结构下讨论

* **收稿日期：** 2015 – 11 – 30
基金项目： 安徽省高校自然科学研究一般资助项目（KJ2014B15）
作者简介： 唐风琴（1983 年生），女；**研究方向：** 概率论极限理论；E-mail：tfq05@163.com

了随机变量序列部分和及随机和的一致渐近分布。

1 预备知识及主要结果

设 $f(x), g(x)$ 值域为 $\mathbf{R}^+$，若 $\limsup\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant 1$，记 $f(x) < \sim g(x)$；若 $\liminf\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 1$，记为 $f(x) > g(x)$；若 $\limsup\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant 1, \liminf\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 1$ 同时成立，则记为 $f(x) \sim g(x)$。另本文中多处用到符号 $C(C_1)$，均为常数，取值依具体情况而定。在风险理论中，极端事件常用重尾分布来刻画，下面介绍一些重要的重尾子族。设 X 为一非负随机变量，分布函数为 $F(x)$。

1）L 族：对于任意固定的 $y > 0$，有 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1$；

2）D 族：对任意的 $y\in(0,1)$（或等价地 $y = 1/2$）$\limsup\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty$；

3）C 族：满足 $\lim\limits_{y\searrow 1}\liminf\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1$，或等价地 $\lim\limits_{y\nearrow 1}\limsup\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1$。

$C\subset D\cap L$。令 $\overline{F}_*(y) = \liminf\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}$，定义 $J_F^+ = \inf\left\{-\frac{\log \overline{F}_*(y)}{\log y}: y > 1\right\}$ 为 Matuszewska 上指标。显然，若 $F\in C$，则 $J_F^+ < \infty$ 且对任意的 $p > J_F^+$，

$$x^{-p} = o(\overline{F}(x)) \tag{1}$$

引理 1 若 $F\in C$，则 $\liminf\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x+o(x))}{\overline{F}(x)} = 1$。

引理 2 若 $F\in D, \rho > J_F^+$，则存在正数 x_0 和 B，使得对于任意的 $\theta\in(0,1]$ 和 $x\geqslant\theta^{-1}x_0$，有 $\frac{\overline{F}(\theta x)}{\overline{F}(x)}\leqslant B\theta^{-\rho}$。

下面介绍著名的 Farlie-Gumbel-Morgenstern（FGM）copula 函数。n 维 FGM 分布具有如下形式：对所有实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$P(X_1\leqslant x_1, X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n) = \prod_{i=1}^{n}F_i(x_i)\Big(1+\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}a_{jk}\overline{F}_j(x_j)\overline{F}_k(x_k)\Big) \tag{2}$$

其中 $F_i(x)$ 是 X_i 的分布函数，a_{jk} 为实数。若对任意的 $j,k, a_{jk} = 0$，则序列 $x_1, x_2,\cdots,x_n$ 是独立的，本文假设至少存在一个 $a_{jk}\neq 0$。由 Tang 等[14] 知若 $F_i(x)$ 是连续的，则有

$$1-\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}a_{jk}\geqslant 0 \tag{3}$$

进一步地，定义序列 $x_1, x_2,\cdots,x_n$ 的生存函数为

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2,\cdots,X_n > x_n) = \hat{H}(P(X_1 > x_1),\cdots,P(X_n > x_n))$$

其中 $\hat{H}:[0,1]^n\to[0,1]$ 也是一个 copula 函数。特别地，当 $n = 2$ 时，对任意的 $i\neq j$ 有

$$P(X_i > x_i, X_j > x_j) = \overline{F}_i(x_i)\overline{F}_j(x_j)(1+\beta\overline{F}_i(x_i)\overline{F}_j(x_j)) \tag{4}$$

$\beta\in[-1,1]$。注意到 $\beta = 0$ 时，X_i 和 X_j 是独立的。同时可得

$$\lim_{\max\{x_i,x_j\}\to\infty}P(X_i > x_i \mid X_j > x_j) = \lim_{\max\{x_i,x_j\}\to\infty}\overline{F}_i(x_i)\cdot\overline{F}_j(x_j)(1+\beta\overline{F}_i(x_i)\overline{F}_j(x_j)) = 0 \tag{5}$$

满足这种关系的序列又称为尾上渐近独立的（upper tail asymptotic independent）。因此，FGM 包含了很多的相依结构，如正（负）相依等。现在给出本文的主要结果。

定理 1 设随机变量序列 $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ 非负相依且满足（2）式，$F_i\in C, \mu_i < \infty$，则对任意的 $\gamma > 0$，当 $x\geqslant\gamma n, n\to\infty$ 时一致成立 $P(S_n > x)\sim\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{F}_i(x)$。

定理 2 设随机变量序列 $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ 满足定理 1 中条件且对于任意的 i,j，存在 $0 < c = c(i,j) < \infty$，满足

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}_i(x)}{\overline{F}_j(x)} = c \tag{6}$$

假设随机过程 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 与 $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ 独立，且对任意小的 $\delta > 0$，$\{N(t), t\geqslant 0\}$ 满足

$$EN(t)I\{N(t) > (1+\delta)\lambda(t)\} = o(\lambda(t)),\ t\to\infty \tag{7}$$

则对任意的 $\gamma > 0$，当 $x\geqslant\gamma\lambda(t), t\to\infty$ 时一致成立

$$P\Big(\sum_{k=1}^{N(t)}X_k > x\Big)\sim\sum_{k=1}^{\lfloor\lambda(t)\rfloor}\overline{F}_k(x)$$

其中 $\lfloor\ \rfloor$ 是取整符号。

2 主要结果的证明

首先给出在证明部分和大偏差的下界时一个非常重要的结论。

引理 3 设随机变量序列 $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ 非负，满足（2）式且存在 $q > 1$ 使得 $\mu_i^{(q)}\triangleq EX_i^q < \infty$，则对任意的 $\gamma > 0, \upsilon > 0$，存在 $p > 0, C = C(\gamma,\upsilon)$，使得对任意的 $n = 1,2,\cdots$，当 $x\geqslant\gamma n$ 时成立 $P(S_n > x)\leqslant$

$\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(\upsilon x)+Cx^{-p}$。

证明　对任意的 $\upsilon>0$，记 $\tilde{X}_i=X_iI\{X_i\leqslant \upsilon x\}+\upsilon xI\{X_i>\upsilon x\}$，$\tilde{S}_n=\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i$ 由（3）式知存在常数 $M>0$ 使得 $P(X_1\leqslant x_1,\cdots,X_n\leqslant x_n)\leqslant M\prod_{i=1}^{n}F_i(x_i)$。因此对任意的 $h>0$，$1<r<q$，由 Chebyshev's 不等式得

$$P(S_n>x)\leqslant \sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(\upsilon x)+P(\tilde{S}_n>x)\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(\upsilon x)+M\mathrm{e}^{-hx}\prod_{i=1}^{n}E\mathrm{e}^{h\tilde{X}_i}\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(\upsilon x)+M\mathrm{e}^{-hx}\cdot$$
$$\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^{\upsilon x}\frac{\mathrm{e}^{hy}-1}{y^r}F_i(\mathrm{d}y)+(\mathrm{e}^{h\upsilon x}-1)\overline{F}_i(x)+1\right)\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(\upsilon x)+M\exp\left\{-hx+\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{e}^{h\upsilon x}-1}{(\upsilon x)^r}+(\mathrm{e}^{h\upsilon x}-1)\overline{F}_i(x)\right]\right\}\tag{8}$$

令 $h=\log\left(\frac{x^r}{\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{(r)}}+1\right)\Big/\upsilon x$，易见 $x\to\infty$ 时，$h\to 0$。将 h 代入（8）式整理得

$$P(S_n>x)\leqslant \sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(\upsilon x)+$$
$$M\exp\left\{-hx+\frac{1}{\upsilon^r}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(x)x}{\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{(r)}}\right\}\leqslant \sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(\upsilon x)+$$
$$\frac{M}{\gamma}x^{-\frac{r-1}{\upsilon}}(\max_i\mu_i^{(r)})^{\frac{1}{\upsilon}}\exp\left\{\frac{1}{\upsilon^r}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(x)x}{\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{(r)}}\right\}$$

令

$$p=\frac{r-1}{\upsilon},$$

$$C=\frac{M}{\gamma}\sup_{x>0}\left[(\max_i\mu_i^{(r)})^{\frac{1}{\upsilon}}\exp\left\{\frac{1}{\upsilon^r}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(x)x}{\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{(r)}}\right\}\right],$$

引理 3 得证。

定理 1 的证明　下界估计。由于 $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ 是非负的，则当 $x\geqslant\gamma n, n\to\infty$ 时有，

$$P(S_n>x)\geqslant \sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(x)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(X_i>x,X_j>x)\geqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(x)-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\overline{F}_i(x_i)\overline{F}_j(x_j)\cdot$$
$$(1+\beta\overline{F}_i(x_i)\overline{F}_j(x_j))\sim\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(x)$$

其中第二个不等式由（4）式得到。

上界估计。对任意的 $0<\upsilon<1$，沿用引理 3 中的记号，有

$$P(S_n>x)\leqslant \sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(\upsilon x)+P(\tilde{S}_n>x)\tag{9}$$

同引理 3 的证明类似，令

$$a=\max\left\{1,-\log\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(\upsilon x)\right)\right\},$$
$$h=\frac{a-r\rho\log a}{\upsilon x}$$

其中 $r>1$，$\rho>J_F^+$。易见，当 $x\geqslant\gamma n, n\to\infty$ 时，$a\to\infty$，$h\to 0$。现估计（9）式中的第二项。由 Chebyshev's 不等式及 $\mathrm{e}^s-1\leqslant s\mathrm{e}^s$，$s>0$ 得

$$\frac{P(\tilde{S}_n>x)}{\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i(\upsilon x)}\leqslant M\exp\{-hx+a\}\prod_{i=1}^{n}E\mathrm{e}^{h\tilde{X}_i}\leqslant$$
$$M\exp\left\{-hx+a+\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^{\frac{\upsilon x}{a^r}}(\mathrm{e}^{hy}-1)F_i(\mathrm{d}y)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\int_{\frac{\upsilon x}{a^r}}^{\upsilon x}(\mathrm{e}^{hy}-1)F_i(\mathrm{d}y)+(\mathrm{e}^{h\upsilon x}-1)\overline{F}_i(\upsilon x)\right)\right\}\leqslant$$
$$M\exp\left\{-hx+a+\sum_{i=1}^{n}\left(h\mathrm{e}^{\frac{h\upsilon x}{a^r}}\mu_i+\right.\right.$$
$$\left.\left.\mathrm{e}^{h\upsilon x}\overline{F}_i\left(\frac{\upsilon x}{a^r}\right)+(\mathrm{e}^{h\upsilon x}-1)\overline{F}_i(\upsilon x)\right)\right\}\leqslant$$
$$M\exp\left\{-hx+a+\sum_{i=1}^{n}\left(h\mathrm{e}^{a^{1-r}}\mu_i+\right.\right.$$
$$\left.\left.B\mathrm{e}^{a-\log a^{r\rho}}a^{r\rho}\overline{F}_i(\upsilon x)+\mathrm{e}^a\overline{F}_i(\upsilon x)\right)\right\}\leqslant$$
$$M\exp\left\{(1-\frac{1}{\upsilon})a+\frac{\log a^{r\rho}}{\upsilon}+\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{n}(h\mathrm{e}^{a^{1-r}}\mu_i+B\mathrm{e}^a\overline{F}_i(\upsilon x)+\mathrm{e}^a\overline{F}_i(\upsilon x))\right\}\leqslant$$
$$C\exp\left\{(1-\frac{1}{\upsilon})a+o(a)+\sum_{i=1}^{n}h\mathrm{e}^{a^{1-r}}\mu_i\right\}\to 0,$$
$$x\geqslant\gamma n, n\to\infty\tag{10}$$

其中 C 为常数，倒数第三步用到引理 2 的结论。联立（9）和（10）式，由 υ 的任意性及引理 1 可得当 $x\geqslant\gamma n, n\to\infty$ 时，上界估计得证。

定理 2 的证明　Chen 等[8]证明了由（7）式可得：存在任意小的正数 δ 使得当 $t\to\infty$ 时，$P(|N(t)-\lambda(t)|<\delta\lambda(t))\to 1$。将 $\sum_{k=1}^{N(t)}X_k$ 取条件分成如下三部分：

$$P\left(\sum_{k=1}^{N(t)} X_k > x\right) = \left(\sum_{n<(1-\delta)\lambda(t)} + \sum_{|n-\lambda(t)|<\delta\lambda(t)} + \sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}\right)P(S_n > x)P(N(t) = n) = I_1 + I_2 + I_3 \tag{11}$$

由 δ 的任意性，（6）式及定理 1 可得，当 $x \geqslant \gamma\lambda(t), t\to\infty$ 时有

$$I_1 = (1+o(1))\sum_{k=1}^{\lfloor(1-\delta)\lambda(t)\rfloor}\bar{F}_k(x)\cdot P(N(t) < (1-\delta)\lambda(t)) = o(1)\sum_{k=1}^{\lfloor\lambda(t)\rfloor}\bar{F}_k(x)\left(1-\frac{\sum_{k=\lfloor(1-\delta)\lambda(t)\rfloor}^{\lfloor\lambda(t)\rfloor}\bar{F}_k(x)}{\sum_{k=1}^{\lfloor\lambda(t)\rfloor}\bar{F}_k(x)}\right) = o\left(\sum_{k=1}^{\lfloor\lambda(t)\rfloor}\bar{F}_k(x)\right) \tag{12}$$

取引理 3 中的 p 满足 $p > J_F^+$，结合引理 1，（1）式，（6）和（7）式知

$$I_3 \leqslant \sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}\left(\sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k(vx) + Cx^{-p}\right)P(N(t) = n) \leqslant \sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}(nC_1\bar{F}_1(vx) + Cx^{-p})P(N(t) = n) = C_1EN(t)I\{N(t) > (1+\delta)\lambda(t)\}\bar{F}_1(vx) + o\left(\sum_{k=1}^{\lfloor\lambda(t)\rfloor}\bar{F}_k(vx)\right) = o\left(\sum_{k=1}^{\lfloor\lambda(t)\rfloor}\bar{F}_k(vx)\right)$$

其中 $C_1 = C_1(c)$ 为正常数。

与 I_1 处理类似，当 $x \geqslant \gamma\lambda(t), t\to\infty$ 时，

$$I_2 \leqslant \sum_{k=1}^{\lfloor(1+\delta)\lambda(t)\rfloor}\bar{F}_k(x)\cdot P(|N(t)-\lambda(t)| < \lambda(t)) \sim \sum_{k=1}^{\lfloor\lambda(t)\rfloor}\bar{F}_k(x) \tag{13}$$

同理可得

$$I_2 \geqslant \sum_{k=1}^{\lfloor(1-\delta)\lambda(t)\rfloor}\bar{F}_k(x)\cdot P(|N(t)-\lambda(t)| < \lambda(t)) \sim \sum_{k=1}^{\lfloor\lambda(t)\rfloor}\bar{F}_k(x) \tag{14}$$

将(12) -(14)式代入(11)式，定理 2 得证。

参考文献：

[1] 陈传勇. 关于任意同分布随机变量序列最大值不等式及其应用[J]. 中山大学学报(自然科学版),2015, 52(2): 59 -61.

[2] MIKOSCH T, NAGAEV A V. Large deviations of heavy-tailed sums with applications in insurance[J]. Extremes, 1998, 1(1): 81 -110.

[3] TANG Q, SU Q, JIANG T, et al. Large deviations for heavy-tailed random sums in compound renewal model [J]. Statistics and Probability Letters, 2001, 52(1): 91 -100.

[4] LIU Y, HU Y J. Large deviations for heavy-tailed random sums of independent random variables with dominatedly varying tails [J]. Science in China Series A, 2003, 46(3): 383 -395.

[5] NG K W, TANG Q, YAN J A, et al. Precise large deviations for sums of random variables with consistently varying tails [J]. Journal of Applied Probability, 2004 (41): 93 -107.

[6] TANG Q. Insensitivity to negative dependence of the asymptotic behavior of precise large deviations [J]. Electronic Journal of Probability, 2006, 11: 107 -120.

[7] LIU L. Precise large deviations for dependent random variables with heavy tails [J]. Statistics and Probability Letters, 2009, 79(9): 1290 -1298.

[8] CHEN Y, YUEN K C, NG K W. Precise large deviations of random sums in presence of negative dependence and consistent variation [J]. Methodology and Computing in Applied Probability, 2011, 13(4):821 -833.

[9] WANG Y B, WANG K Y, CHENG D Y. Precise large deviations for sums of negatively associated random variables with common dominatedly varying tails [J]. Acta Mathematica Sinica-English Series, 2006, 22(6): 725 -1734.

[10] WANG K Y, YANG Y, LIN J G. Precise large deviations for widely orthant dependent random variables with dominatedly varying tails [J]. Frontiers of Mathematics in China, 2012, 7(5): 919 -932.

[11] TANG Q, TSITSIASHVILI G. Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete time model with heavy-tailed insurance and financial risks [J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2003, 108 (2): 299 -325.

[12] TANG F Q, BAI J M. Precise large deviations for aggregate loss process in a multi-risk model [J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2015, 52(3): 447 -467.

[13] HE W, CHENG D, WANG Y. Asymptotic lower bounds of precise large deviations with nonnegative and dependent random variables [J]. Statistics and Probability Letters, 2013, 83(1): 331 -338.

[14] TANG Q, VERNIC R. The impact on ruin probabilities of the association structure among financial risks [J]. Statistics and Probability Letters, 2007, 77(14): 1522 -1525.